УДК 514 - 539

О. Н. РАДЧЕНКОВ

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В КОМПЕНСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ТЯГОТЕНИЯ.

Представлены два метода вывода динамических законов сохранения в компенсационной модели тяготения. На их основе, в модели, выявлено локальное отличие инертных и гравитационных свойств материи.

Ключевые слова: *калибровочный формализм, динамические законы сохранения, темная материя.*

Введение.

В теории поля динамические законы сохранения получают, опираясь и на теоремы Нётер, и выделяя их из уравнений полей описывающих взаимодействия. Методы эти не эквивалентны. В первом используются все экстремали замкнутой физической системы, во втором – экстремали её полевой подсистемы. Покажем, что эти методы приводят к разным результатам в компенсационной модели тяготения (КМТ) [1]. Важность такого факта объясняется тем, что методы позволяют составить в КМТ независимые представления об инертных и тяготеющих свойствах материи.

Напомним некоторые положения этой теории. Главную её новизну составляет выбор симметрии гравитационного взаимодействия: операции параллельного переноса вдоль интегральных кривых некоторого векторного поля в пространстве Минковского M_4. Именно так трактуются неоднородные трансляции T(4) в работе [1]. Это позволило выявить особые трансформационные свойства известных полей, и представить тяготение как калибровочную теорию нового смешанного тензорного поля G^{ν}_{μ}. КМТ строится по аналогии с теорией Янга-Миллса, и обобщает её. Выбор полевого лагранжиана здесь оказался жестко увязан с симметриями M_4. Эта функция не содержит вторых производных, и удовлетворяет всем предъявляемым к таким конструкциям требованиям. Соответствующие уравнения формально воспроизводят тетрадное представление уравнений Эйнштейна, но представления о базовом и касательном пространствах меняются местами.

КМТ строится в плоском M_4. Здесь легко формулируются интегральные законы сохранения, если известны их локальные аналоги – ковариантные уравнения непрерывности [2]. Ниже, мы ограничимся выводом именно этих локальных законов.

1. Локальные законы сохранения внутренних симметрий.

Рассмотрим поля $\psi=\left(\phi_1,\phi_2,..,\phi_N\right)$ и A_μ, чьи сечения при неоднородных T(4) преобразуются посредством левых сдвигов. Поля из набора ψ принимают значение в некотором векторном пространстве Φ; поле $A_\mu = A^a_\mu I_a$ - в алгебре Ли группы U квадратных матриц ранга N, где I_a - генераторы. T(4)-инвариантный лагранжиан такой системы дается формулами (2.18) и (2.24) в [1]:

$$\Lambda\left(\psi,\nabla_\mu\psi,A^a_\nu,\nabla_\mu A^a_\nu\right)=L_\psi(\psi,D_\mu\psi)\det e^{-1}+L_A\left(F^a_{\mu\nu}\right)\det e^{-1}\ . \tag{1.1}$$

Здесь $\det e^{-1}$ - определитель матрицы $e^{(\nu)}_\mu$ обратной к тензору $e^{\nu}_{(\mu)}=\delta^\nu_\mu-G^\nu_\mu$, ∇_μ - ковариантная производная на расслоении над M_4, $\partial_\mu=e^{\nu}_{(\mu)}\nabla_\nu$ и $D_\mu=\partial_\mu+A_\mu$ - удлиненные ковариантные производные (2.5) и (2.16) работы [1], L_A - квадратичная функция тензора напряженности

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+c^a_{bc}A^b_\mu A^c_\nu-C^\lambda{}_{\mu\nu}A^a_\lambda\,, \tag{1.2}$$

где c^a_{bc} - структурные константы алгебры Ли группы U,

$$C^\lambda{}_{\mu\nu}=\left(e^\sigma_{(\mu)}\nabla_\sigma e^\eta_{(\nu)}-e^\sigma_{(\nu)}\nabla_\sigma e^\eta_{(\mu)}\right)e^{(\lambda)}_\eta\,. \tag{1.3}$$

Лагранжиан (1.1) инвариантен к симметрии (не путать ∂_μ с частным дифференцированием!):

$$\psi\to U\psi,\qquad A_\mu\to UA_\mu U^{-1}+U\partial_\mu U^{-1}\,, \tag{1.4}$$

где набор полей ψ рассматривается как матрица-столбец. На языке однопараметрических подгрупп $u(t)=\exp\left(t\varepsilon^a(x)I_a\right)\in U$, где $\varepsilon^a(x)$ - неоднородные параметры, это можно записать как

$$\dot{\Lambda} \equiv \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi}\right|_{\nabla_\mu \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu \psi} \nabla_\mu \dot{\psi} + \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial A^a_\mu}\right|_{\nabla_\mu A^a_\nu} \dot{A}^a_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu A^a_\nu} \nabla_\mu \dot{A}^a_\nu = 0 . \qquad (1.5)$$

Здесь по полям ψ и их компонентам подразумевается суммирование, символ под чертой означает фиксацию данного аргумента, скорости изменения формы полей в единице U имеют вид:

$$\dot{\psi} = \left.\frac{d}{dt}\big(u(t)\psi\big)\right|_{t=0} = \varepsilon^a I_a \psi , \quad \dot{A}^a_\mu I_a = \left.\frac{d}{dt}\Big(u(t) A_\mu u^{-1}(t) + u(t)\partial_\mu u^{-1}(t)\Big)\right|_{t=0} = \left(\varepsilon^b c^a_{bc} A^c_\mu - \partial_\mu \varepsilon^a\right) I_a . \quad (1.6)$$

Рассмотрим равенство (1.5) на экстремалях системы

$$\nabla_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu \psi} = \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial \psi}\right|_{\nabla_\mu \psi} , \qquad \nabla_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu A^a_\nu} = \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial A^a_\nu}\right|_{\nabla_\mu A^a_\nu} . \qquad (1.7)$$

Оно тогда предстанет как уравнение

$$\nabla_\mu \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu A^a_\nu} \dot{A}^a_\nu \right) = \varepsilon^a \nabla_\mu z^\mu_a + \nabla_\mu \varepsilon^a \left(z^\mu_a - \nabla_\nu \sigma^{\nu\mu}_a \right) + \sigma^{\mu\nu}_a \nabla_\mu \nabla_\nu \varepsilon^a = 0 , \qquad (1.8)$$

на нётеровы токи и суперпотенциалы:

$$z^\mu_a = \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu \psi} I_a \psi + \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu A^b_\nu} c^b_{ac} A^c_\nu = e^\mu_{(\nu)} \left(\frac{\partial L_\psi}{\partial D_\nu \psi} I_a \psi + \frac{\partial L_A}{\partial F^b_{\nu\lambda}} c^b_{ac} A^c_\lambda \right) \det e^{-1} , \qquad (1.9)$$

$$\sigma^{\mu\nu}_a \left(A_\nu , \nabla_\mu A_\nu \right) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\nu A^a_\lambda} e^\mu_{(\lambda)} = \frac{\partial L_A}{\partial F^a_{\lambda\sigma}} e^\mu_{(\lambda)} e^\nu_{(\sigma)} \det e^{-1} . \qquad (1.10)$$

Функции $\varepsilon^a , \nabla_\mu \varepsilon^a , \nabla_\mu \nabla_\nu \varepsilon^a$ - произвольны и независимы. Отсюда следуют уравнения непрерывности для токов, дивергентная связь токов с суперпотенциалами, и косая симметрия последних:

$$\nabla_\mu z^\mu_a = 0, \qquad z^\mu_a = \nabla_\nu \sigma^{\nu\mu}_a , \qquad \sigma^{\mu\nu}_a = -\sigma^{\nu\mu}_a . \qquad (1.11)$$

Обратимся к экстремалям полей A^a_μ - правому уравнению в (1.7). Введем обозначения

$$L^{\mu\nu}_a = \frac{\partial L_A}{\partial F^a_{\mu\nu}} , \qquad J^\mu_a = \frac{\partial L_\psi}{\partial D_\mu \psi} I_a \psi , \qquad j^\mu_a = \frac{\partial L_A}{\partial F^b_{\mu\lambda}} c^b_{ac} A^c_\lambda . \qquad (1.12)$$

Так как $\nabla_\mu A^a_\nu$ входит в лагранжиан (1.1) только посредством тензора $F^a_{\mu\nu}$, справедливо:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu A^a_\nu} = e^\mu_{(\lambda)} L^{\lambda\nu}_a \det e^{-1} , \qquad \nabla_\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \nabla_\mu A^a_\nu} = \left(\partial_\mu L^{\mu\nu}_a - C^\lambda{}_{\mu\lambda} L^{\mu\nu}_a \right) \det e^{-1} , \\ \left.\frac{\partial \Lambda}{\partial A^a_\nu}\right|_{\nabla_\mu A^a_\nu} = \left(\frac{\partial L}{\partial D_\nu \psi} I_a \psi + L^{\nu\mu}_b c^b_{ac} A^c_\mu - \frac{1}{2} C^\nu{}_{\mu\lambda} L^{\mu\lambda}_a \right) \det e^{-1} . \end{gathered} \qquad (1.13)$$

Поэтому экстремали можно представить в виде:

$$\partial_\mu L^{\mu\nu}_a - L^{\mu\nu}_a C^\lambda{}_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} L^{\mu\lambda}_a C^\nu{}_{\mu\lambda} = J^\nu_a + j^\nu_a . \qquad (1.14)$$

Применим к (1.14) оператор ∂_ν. Воспользуемся равенствами (2.20) и (2.26) в [1], записав их как:

$$\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu = C^\lambda{}_{\mu\nu} \partial_\lambda , \qquad \partial_\mu C^\lambda{}_{\nu\lambda} + \partial_\nu C^\lambda{}_{\lambda\mu} + \partial_\lambda C^\lambda{}_{\mu\nu} = C^\lambda{}_{\lambda\eta} C^\eta{}_{\mu\nu} . \qquad (1.15)$$

Для левой части, используя сами уравнения (1.14), тогда будем иметь:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\left(\partial_\nu \partial_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \right) L^{\mu\nu}_a - \partial_\nu L^{\mu\nu}_a C^\lambda{}_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} L^{\mu\nu}_a \left(\partial_\nu C^\lambda{}_{\mu\lambda} - \partial_\mu C^\lambda{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda C^\lambda{}_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} C^\nu{}_{\mu\lambda} \partial_\nu L^{\mu\lambda}_a = \\ = \left(J^\mu_a + j^\mu_a + L^{\nu\mu}_a C^\sigma{}_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} L^{\nu\sigma}_a C^\mu{}_{\nu\sigma} \right) C^\lambda{}_{\mu\lambda} + \frac{1}{2} L^{\mu\nu}_a C^\lambda{}_{\sigma\lambda} C^\sigma{}_{\mu\nu} = C^\lambda{}_{\mu\lambda} \left(J^\mu_a + j^\mu_a \right) . \end{gathered} \qquad (1.16)$$

Учитывая определение (1.3), представим в целом результат действия ∂_ν на экстремали (1.14):

$$e^\mu_{(\nu)} \nabla_\mu \left(J^\nu_a + j^\nu_a \right) - C^\lambda{}_{\nu\lambda} \left(J^\nu_a + j^\nu_a \right) = \det e \nabla_\mu \left\{ e^\mu_{(\nu)} \left(J^\nu_a + j^\nu_a \right) \det e^{-1} \right\} = \det e \left(\nabla_\mu z^\mu_a \right) = 0 . \qquad (1.17)$$

Заменим выражение в фигурных скобках в (1.17), левой частью уравнений (1.14):

$$e^{\nu}_{(\mu)}\left(e^{\sigma}_{(\lambda)}\nabla_{\sigma}L^{\lambda\mu}_{a}+\frac{1}{2}L^{\lambda\eta}_{a}C^{\mu}{}_{\lambda\eta}-L^{\lambda\mu}_{a}C^{\eta}{}_{\lambda\eta}\right)\det e^{-1}=\nabla_{\sigma}\left(e^{\sigma}_{(\lambda)}e^{\nu}_{(\mu)}L^{\lambda\mu}_{a}\det e^{-1}\right)=\nabla_{\lambda}\sigma^{\lambda\nu}_{a}. \quad (1.18)$$

Следовательно, для внутренних симметрий, методы приводят к одинаковым результатам.

2. Локальные законы сохранения энергии-импульса.

Пусть дана замкнутая система, представляющая собой сплошную изоэнтропическую среду, рассмотренные выше поля $Y=\left(\psi,A^{a}_{\mu}\right)$, и "гравитационное" поле $e^{\nu}_{(\mu)}=\delta^{\nu}_{\mu}-G^{\nu}_{\mu}$. Её лагранжиан

$$\Lambda=\Lambda_{f}\left(s,b^{\nu}_{\mu},e^{\tau}_{(\nu)}\right)+\Lambda_{Y}\left(Y,\nabla_{\mu}Y,e^{\tau}_{(\nu)},\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}\right)+\Lambda_{G}\left(e^{\tau}_{(\nu)},\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}\right), \quad (2.1)$$

где s - собственная удельная энтропия среды, $b^{\nu}_{\mu}=\partial x^{\nu}/\partial a^{\mu}$ - матрица 4-дисторсии, Λ_{Y} - дается выражением (1.1), лагранжианы сплошной среды Λ_{f} и гравитационного поля Λ_{G} - формулами (2.14) и (3.5) в [1]. Условие T(4)-инвариантности для лагранжиана (2.1) имеет вид:

$$\dot{\Lambda}\equiv\frac{\partial\Lambda}{\partial s}\dot{s}+\frac{\partial\Lambda}{\partial b^{\nu}_{\mu}}\dot{b}^{\nu}_{\mu}+\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial Y}\right|_{\nabla_{\mu}Y}\dot{Y}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\mu}\dot{Y}+\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial e^{\tau}_{(\nu)}}\right|_{\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}\dot{e}^{\tau}_{(\nu)}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}\nabla_{\mu}\dot{e}^{\tau}_{(\nu)}=-\nabla_{\mu}\left(\Lambda\varepsilon^{\mu}\right). \quad (2.2)$$

Здесь по полям Y и их компонентам подразумевается суммирование, скорости изменения формы полей в единице неоднородной T(4) даются выражениями (2.8), (2.11) и (3.2) работы [1]:

$$\dot{s}=-\varepsilon^{\mu}\nabla_{\mu}s,\quad \dot{Y}=-\varepsilon^{\mu}\nabla_{\mu}Y;\qquad \dot{b}^{\nu}_{\mu}=b^{\lambda}_{\mu}\nabla_{\lambda}\varepsilon^{\nu}-\varepsilon^{\lambda}\nabla_{\lambda}b^{\nu}_{\mu},\quad \dot{e}^{\tau}_{(\nu)}=e^{\mu}_{(\nu)}\nabla_{\mu}\varepsilon^{\tau}-\varepsilon^{\mu}\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}; \quad (2.3)$$

где ε^{μ} - векторное поле вдоль чьих интегральных кривых производится параллельный перенос.

Формулы (2.3) иллюстрируют скорости изменения формы полей материи, преобразующихся соответственно посредством левых сдвигов и "присоединенному" представлению. При этом важно учитывать, что T(4) не действуют на геометрические структуры пространства Минковского, в частности – поле метрики $\eta_{\mu\nu}$ (ковариантная производная метрического тензора равна нулю).

Рассмотрим условие (2.2) на экстремалях системы

$$\nabla_{\mu}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial b^{\nu}_{\lambda}}b^{\mu}_{\lambda}\right)=-\frac{\partial\Lambda}{\partial b^{\mu}_{\lambda}}\nabla_{\nu}b^{\mu}_{\lambda},\qquad \nabla_{\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}Y}=\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial Y}\right|_{\nabla_{\mu}Y},\qquad \nabla_{\mu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}=\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial e^{\tau}_{(\nu)}}\right|_{\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}. \quad (2.4)$$

Особый вид левого уравнения здесь обусловлен тем, что в действии сплошной среды

$$S\sim\int\Lambda\left(x,\partial x/\partial a\right)\left(-\eta\right)^{1/2}d^{4}x=\int\Lambda\left(x(a),b\left(x(a)\right)\right)\left(-\eta\left(x(a)\right)\right)^{1/2}\det b\left(x(a)\right)d^{4}a, \quad (2.5)$$

где $\det b$ и η - определители 4-дисторсии и метрики, варьируются траектории частиц среды $x^{\mu}=x^{\mu}(a^{0},a^{1},a^{2},a^{3})$. Уравнения Эйлера-Лагранжа $\delta S/\delta x^{\mu}$ для функционала (2.5) можно привести к такому виду, если учесть, что b^{ν}_{μ} и $\partial\Lambda/\partial b^{\nu}_{\mu}$ при ковариантном дифференцировании должны рассматриваться соответственно как вектор и ковектор, и справедливо

$$\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}=b^{\lambda}_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}},\qquad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(-\eta\right)^{1/2}=\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\left(-\eta\right)^{1/2},\qquad \nabla_{\mu}\Lambda=\frac{\partial\Lambda}{\partial b^{\nu}_{\lambda}}\nabla_{\mu}b^{\nu}_{\lambda}+\left.\frac{\partial\Lambda}{\partial x^{\mu}}\right|_{b^{\nu}_{\mu}}, \quad (2.6)$$

где $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ - символы Кристоффеля. При инфинитезимальных трансляциях, вектор сдвига частиц $\varepsilon^{\mu}\delta t$, на экстремалях сплошной среды, будет пропорционален 4-скорости u^{μ}. Сравним вид $\dot{s}$ в (2.3), и условие изоэнтропичности (2.9) в [1]. Тогда на траекториях изоэнтропической среды

$$\dot{s}=0, \quad (2.7)$$

и условие (2.2), на всех экстремалях замкнутой системы, можно переписать как уравнение:

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda}+\nabla_{\mu}\left(\Lambda\varepsilon^{\mu}\right)&=\nabla_{\mu}\left(\varepsilon^{\nu}\frac{\partial\Lambda}{\partial b^{\nu}_{\lambda}}b^{\mu}_{\lambda}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}Y}\dot{Y}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}e^{\nu}_{(\lambda)}}\dot{e}^{\nu}_{(\lambda)}+\Lambda\varepsilon^{\mu}\right)=\\&=-\varepsilon^{\nu}\nabla_{\mu}z^{\mu}_{\nu}-\nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu}\left(z^{\mu}_{\nu}-\nabla_{\lambda}\sigma^{\lambda\mu}_{\nu}\right)-\sigma^{\lambda\mu}_{\nu}\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu}=0,\end{aligned} \quad (2.8)$$

где функции $\varepsilon^{\nu},\nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu},\nabla_{\mu}\nabla_{\lambda}\varepsilon^{\nu}$ - произвольны и независимы,

$$z^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\nu}Y-\frac{\partial\Lambda}{\partial b^{\nu}_{\lambda}}b^{\mu}_{\lambda}+\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\lambda)}}\nabla_{\nu}e^{\tau}_{(\lambda)}-\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda, \tag{2.9}$$

$$\sigma^{\mu\nu}_{\tau}\left(A_{\nu},\nabla_{\mu}A_{\nu},e^{\nu}_{(\mu)},\nabla_{\lambda}e^{\nu}_{(\mu)}\right)=\frac{\partial\Lambda}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\lambda)}}e^{\nu}_{(\lambda)}=e^{(\lambda)}_{\tau}\left(\frac{\partial\Lambda_{Y}}{\partial C^{\lambda}{}_{\eta\sigma}}+\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial C^{\lambda}{}_{\eta\sigma}}\right)e^{\mu}_{(\eta)}e^{\nu}_{(\sigma)}. \tag{2.10}$$

Но тензоры z^{ν}_{μ} и $\sigma^{\mu\nu}_{\lambda}$ не инвариантны к симметрии (1.4). Пользуясь тем, что нётеровы токи определенны с точностью до аддитивного члена - дивергенции кососимметричного тензора, определим соответствующий суперпотенциал, как функцию состояния только гравитационного поля:

$$I^{\mu\nu}_{\tau}\left(e^{\lambda}_{(\eta)},\nabla_{\mu}e^{\lambda}_{(\eta)}\right)=\sigma^{\mu\nu}_{\tau}-\frac{\partial\Lambda_{Y}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\eta)}}e^{\nu}_{(\eta)}=e^{(\lambda)}_{\tau}\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial C^{\lambda}_{\eta\sigma}}e^{\mu}_{(\eta)}e^{\nu}_{(\sigma)}, \tag{2.11}$$

и новые, *инертные* тензоры энергии-импульса полей вещества и поля тяготения

$$\Theta^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial\Lambda_{Y}}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\nu}Y+\frac{\partial\Lambda_{Y}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\eta}_{(\lambda)}}\nabla_{\nu}e^{\eta}_{(\lambda)}-\nabla_{\lambda}\left(\frac{\partial\Lambda_{Y}}{\partial\nabla_{\lambda}e^{\nu}_{(\eta)}}e^{\mu}_{(\eta)}\right)-\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda_{Y}-\frac{\partial\Lambda_{f}}{\partial b^{\nu}_{\lambda}}b^{\mu}_{\lambda}-\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda_{f}, \tag{2.12}$$

$$\theta^{\mu}_{\nu}=\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\eta}_{(\lambda)}}\nabla_{\nu}e^{\eta}_{(\lambda)}-\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda_{G}. \tag{2.13}$$

Они, очевидно, инвариантны к преобразованиям (1.4), и удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_{\mu}\left(\Theta^{\mu}_{\nu}+\theta^{\mu}_{\nu}\right)=0,\qquad \Theta^{\mu}_{\nu}+\theta^{\mu}_{\nu}=\nabla_{\lambda}I^{\lambda\mu}_{\nu},\qquad I^{\lambda\mu}_{\nu}=-I^{\mu\lambda}_{\nu}. \tag{2.14}$$

Рассмотрим экстремали гравитационного поля. Запишем правое уравнение в (2.4), как

$$\nabla_{\mu}\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}-\left.\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial e^{\tau}_{(\nu)}}\right|_{\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}=\left.\frac{\partial\Lambda_{m}}{\partial e^{\tau}_{(\nu)}}\right|_{\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}-\nabla_{\mu}\frac{\partial\Lambda_{m}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}},\qquad \Lambda_{m}=\Lambda_{Y}+\Lambda_{f}. \tag{2.15}$$

Введем *тяготеющие* тензоры энергии-импульса полей вещества T^{ν}_{μ} и поля тяготения t^{ν}_{μ}:

$$L^{\mu\nu}_{\lambda}=\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial C^{\lambda}{}_{\mu\nu}}\det e,\quad T^{\nu}_{\mu}=e^{\eta}_{(\mu)}\left(\left.\frac{\partial\Lambda_{m}}{\partial e^{\eta}_{(\nu)}}\right|_{\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}-\nabla_{\lambda}\frac{\partial\Lambda_{m}}{\partial\nabla_{\lambda}e^{\eta}_{(\nu)}}\right)\det e,\quad t^{\nu}_{\mu}=L^{\nu\eta}_{\lambda}C^{\lambda}{}_{\mu\eta}-\delta^{\nu}_{\mu}\Lambda_{G}\det e. \tag{2.16}$$

Так как $\nabla_{\mu}e^{\lambda}_{(\nu)}$ входит в лагранжиан (2.1) только посредством тензора $C^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, справедливо:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}=L^{\lambda\nu}_{\sigma}e^{\mu}_{(\lambda)}e^{(\sigma)}_{\tau}\det e^{-1},\quad \nabla_{\mu}\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}=\left(\partial_{\mu}L^{\mu\nu}_{\sigma}-C^{\lambda}{}_{\mu\lambda}L^{\mu\nu}_{\sigma}-L^{\mu\nu}_{\lambda}e^{(\lambda)}_{\eta}\partial_{\mu}e^{\eta}_{(\sigma)}\right)e^{(\sigma)}_{\tau}\det e^{-1},\\ \left.\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial e^{\tau}_{(\nu)}}\right|_{\nabla_{\mu}e^{\tau}_{(\nu)}}=\left(L^{\nu\mu}_{\lambda}e^{(\lambda)}_{\eta}\partial_{\sigma}e^{\eta}_{(\mu)}-\frac{1}{2}L^{\mu\lambda}_{\sigma}C^{\nu}{}_{\mu\lambda}-\delta^{\nu}_{\sigma}\Lambda_{G}\det e\right)e^{(\sigma)}_{\tau}\det e^{-1}.\end{gathered} \tag{2.17}$$

Поэтому экстремали (2.15) можно записать в виде, полностью аналогичном уравнениям (1.14):

$$\partial_{\mu}L^{\mu\nu}_{\sigma}-L^{\mu\nu}_{\sigma}C^{\lambda}{}_{\mu\lambda}+\frac{1}{2}L^{\mu\lambda}_{\sigma}C^{\nu}{}_{\mu\lambda}=T^{\nu}_{\sigma}+t^{\nu}_{\sigma}. \tag{2.18}$$

Применим к этим уравнениям оператор ∂_{ν}. Проделав выкладки (1.15) – (1.18), получим:

$$\nabla_{\nu}\left(e^{\nu}_{(\mu)}\left(T^{\mu}_{\sigma}+t^{\mu}_{\sigma}\right)\det e^{-1}\right)=0,\qquad e^{\nu}_{(\mu)}\left(T^{\mu}_{\sigma}+t^{\mu}_{\sigma}\right)\det e^{-1}=\nabla_{\mu}G^{\mu\nu}_{\sigma},\qquad G^{\mu\nu}_{\sigma}=\frac{\partial\Lambda_{G}}{\partial C^{\sigma}{}_{\lambda\eta}}e^{\mu}_{(\lambda)}e^{\nu}_{(\eta)}. \tag{2.19}$$

Сравним уравнения непрерывности в (2.14), и в (2.19). Токи этих уравнений отличаются, выражаясь через разные, *инертный* $I^{\mu\nu}_{\lambda}$ и *тяготеющий* $G^{\mu\nu}_{\lambda}$ суперпотенциалы!

Это отличие, однако, не скажется на полных значениях интегралов энергии-импульса. В M_4 выделены два распределения вещества: островное, и однородно-изотропное. На больших расстояниях r от первого, все поля можно считать центрально симметричными. Если на асимптотике поля убывают обратно пропорционально r (не медленнее!), справедливы оценки:

$$G^{\nu}_{\mu}\sim r^{-1},\qquad C^{\lambda}{}_{\mu\nu}\sim r^{-2},\qquad G^{\mu\nu}_{\eta}=\left(\delta^{\lambda}_{\eta}-G^{\lambda}_{\eta}\right)I^{\mu\nu}_{\lambda}\sim r^{-2}. \tag{2.20}$$

Полные значения энергии-импульса будут равны произведению суперпотенциалов на площадь сферы, внутри которой заключена островная система. Полагая G_{μ}^{ν} равным нулю на бесконечности, получим равенство двух видов интегралов. Этот результат можно проецировать на любое распределение материи. Но в однородно-изотропном случае полные значения можно определить, просто суммируя по пространственным областям, где такое распределение уже наблюдается. Отсюда следует равенство интегралов у каждой такой области, и наоборот, их различие будет обусловлено неоднородным и анизотропным в выделенном объеме распределением вещества.

3. Уравнения движения вещества в гравитационном поле.

Выявленное отличие инертных и тяготеющих свойств материи не противоречит тому, что в поле тяготения все тела движутся с одинаковым ускорением. Локально, движение вещества в теории поля описывает уравнение баланса для тензора энергии-импульса. Требуемая кинематика возникает, если член-источник в нём оказывается пропорционален тензору энергии-импульса. Рассмотрим условие T(4)-инвариантности (2.2), которому в гравитационном поле должен отдельно удовлетворять лагранжиан полей вещества. Подставив $\Lambda_m = \Lambda_Y + \Lambda_f$ и скорости $\dot{b}_{\mu}^{\nu}$ с $\dot{Y}$ из (2.3), это условие на экстремалях полей вещества в (2.4) и (2.7) можно переписать как

$$\nabla_{\mu}\left(\varepsilon^{\nu}\left[\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\nu}Y-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial b_{\lambda}^{\nu}}b_{\lambda}^{\mu}-\delta_{\nu}^{\mu}\Lambda_m\right]-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}e_{(\lambda)}^{\nu}}\dot{e}_{(\lambda)}^{\nu}\right)=\left\{\left.\frac{\partial\Lambda_m}{\partial e_{(\mu)}^{\nu}}\right|_{\nabla_{\lambda}e_{(\mu)}^{\nu}}-\nabla_{\lambda}\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\lambda}e_{(\mu)}^{\nu}}\right\}\dot{e}_{(\mu)}^{\nu}. \qquad (3.1)$$

Выражение справа пропорционально тензору T_{ν}^{μ}. Расписывая $\dot{e}_{(\mu)}^{\nu}$ из (2.3), будем иметь

$$\begin{gathered}\nabla_{\mu}\left(\varepsilon^{\nu}\left[\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\nu}Y-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial b_{\lambda}^{\nu}}b_{\lambda}^{\mu}+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}e_{(\lambda)}^{\eta}}\nabla_{\nu}e_{(\lambda)}^{\eta}-\delta_{\nu}^{\mu}\Lambda_m\right]-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}e_{(\lambda)}^{\nu}}e_{(\lambda)}^{\eta}\nabla_{\eta}\varepsilon^{\nu}\right)=\\ =T_{\lambda}^{\mu}e_{\nu}^{(\lambda)}\det e^{-1}\left(e_{(\mu)}^{\eta}\nabla_{\eta}\varepsilon^{\nu}-\varepsilon^{\eta}\nabla_{\eta}e_{(\mu)}^{\nu}\right).\end{gathered} \qquad (3.2)$$

Члены при функциях $\varepsilon^{\nu}, \nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu}, \nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu}$ должны быть равны нулю. Член при $\nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}e_{(\eta)}^{\nu}}e_{(\eta)}^{\lambda}+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\lambda}e_{(\eta)}^{\nu}}e_{(\eta)}^{\mu}\right)=\frac{1}{2}e_{\nu}^{(\rho)}\left(\frac{\partial\Lambda_Y}{\partial C^{\rho}{}_{\eta\sigma}}+\frac{\partial\Lambda_Y}{\partial C^{\rho}{}_{\sigma\eta}}\right)e_{(\eta)}^{\lambda}e_{(\sigma)}^{\mu}\equiv 0, \qquad (3.3)$$

согласно определению (1.3), обращается в ноль тождественно. Член при $\nabla_{\mu}\varepsilon^{\nu}$

$$\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\nu}Y-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial b_{\lambda}^{\nu}}b_{\lambda}^{\mu}+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}e_{(\lambda)}^{\eta}}\nabla_{\nu}e_{(\lambda)}^{\eta}-\nabla_{\eta}\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\eta}e_{(\lambda)}^{\nu}}e_{(\lambda)}^{\mu}\right)-\delta_{\nu}^{\mu}\Lambda_m-e_{(\eta)}^{\mu}T_{\lambda}^{\eta}e_{\nu}^{(\lambda)}\det e^{-1}=0, \qquad (3.4)$$

показывает связь тяготеющего и инертного тензоров энергии-импульса полей вещества:

$$T_{\nu}^{\mu}=\left(e_{\eta}^{(\mu)}\cdot\Theta_{\lambda}^{\eta}\cdot e_{(\nu)}^{\lambda}\right)\det e. \qquad (3.5)$$

Член при ε^{ν}

$$\nabla_{\mu}\left(\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}Y}\nabla_{\nu}Y-\frac{\partial\Lambda_m}{\partial b_{\lambda}^{\nu}}b_{\lambda}^{\mu}+\frac{\partial\Lambda_m}{\partial\nabla_{\mu}e_{(\lambda)}^{\eta}}\nabla_{\nu}e_{(\lambda)}^{\eta}-\delta_{\nu}^{\mu}\Lambda_m\right)-e_{\mu}^{(\eta)}\nabla_{\nu}e_{(\eta)}^{\lambda}T_{\lambda}^{\mu}\det e^{-1}=0, \qquad (3.6)$$

с учетом соотношений (3.3), (3.4) и (3.5), предстает искомым ковариантным уравнением баланса:

$$\nabla_{\mu}\Theta_{\nu}^{\mu}\equiv\frac{1}{(-\eta)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\Theta_{\nu}^{\mu}(-\eta)^{1/2}\right)-\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\Theta_{\lambda}^{\mu}=\gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Theta_{\lambda}^{\mu}, \qquad (3.7)$$

где для иллюстрации подобия сил инерции и тяготения в КМТ, выделены их “напряженности”:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}=-h_{\mu}^{a}\,\partial h_{a}^{\lambda}/\partial x^{\nu}, \qquad \gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=e_{\mu}^{(\eta)}\nabla_{\nu}e_{(\eta)}^{\lambda}. \qquad (3.8)$$

Здесь мы воспользовались уравнением (1.1) работы [1], и выразили через ортонормированные трансляционные векторы Киллинга h_{a}^{ν} и взаимную тетраду h_{μ}^{a}, символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$.

Учитывая (3.5), уравнения движения вещества (3.7), удобно представить в виде

$$\partial_{\mu}T_{\nu}^{\mu}+C^{\lambda}{}_{\nu\mu}T_{\lambda}^{\mu}-C^{\lambda}{}_{\mu\lambda}T_{\nu}^{\mu}=0. \qquad (3.9)$$

Законы (3.7) и (3.9) можно выделить непосредственно из уравнений непрерывности в (2.14) и в (2.19). В первом случае надо расписать на экстремалях (2.15) дивергенцию тензора (2.13), во втором – подставив t_{μ}^{ν} из (2.16), использовать уравнения поля (2.18) и тождество (2.26) в [1].

Рассмотрим связь (3.5). Легко заметить, что наличие функции $\det e$ должно приводить к разным результатам при оценке массы крупных гравитационно-связанных объектов. Действительно, зная кинематику пробных тел в поле таких объектов, на базе законов (3.9), можно определить поля $e_{(\mu)}^{\nu}$ и $C^{\lambda}{}_{\mu\nu}$, и далее - согласно уравнениям (2.18) – поле источников T_{μ}^{ν}. В качестве T_{μ}^{ν} удобен гидродинамический тензор (3.15) [1]. В нем можно оставить лишь вклад плотности массы покоя, положив: $T_0^0 \approx \mu c^2$. Определив так функцию μ, интегрируя её по объему, получим первую оценку. Она будет характеризовать массу как величину гравитационного заряда. Другую оценку массы крупных объектов можно связать с их светимостью. Светимость зависит от температуры вещества T. В термодинамике T определяется в системе покоя вещества, как производная энергии по энтропии, где энергия - сохраняющаяся величина, обусловленная инертными свойствами материи [3]. Соответственно, локально температуру в КМТ можно определить соотношением

$$T = \partial\Theta_0^0/\partial\sigma\big|_{v=0}, \qquad (\sigma = \rho s) \tag{3.10}$$

где σ - плотность энтропии, v - скорость вещества. Зная температуру и, например, концентрацию вещества, легко определить собственную инертную плотность массы ρ. Интегрируя ρ, получим вторую оценку. Она будет характеризовать массу как меру инертности. Эти оценки будут отличаться, так как согласно формулам (2.12), (2.15) в [1], и (22) работы [4], справедливо:

$$\mu = \rho\left(\eta_{\mu\nu}e_{\eta}^{(\mu)}e_{\lambda}^{(\nu)}u^{\eta}u^{\lambda}\right)^{1/2}\det e. \tag{3.11}$$

Полученный результат, на наш взгляд, может иметь прямое отношение к вопросу о природе скрытой (темной) массы галактик и их скоплений [5]. Во всяком случае, он представляет некоторую разумную альтернативу попыткам ввести в оборот новые экзотические частицы [6].

Заключение.

Методы, посредством которых в теории поля выводят динамические законы сохранения, приводят в КМТ к одинаковым результатам для внутренних симметрий, и разным – для трансляций. С их помощью можно определять локальные инертные и тяготеющие свойства любых видов материи, включая и гравитацию. Эти свойства отличаются при неоднородном и анизотропном распределении материи. Темная масса, приписываемая многим крупным астрофизическим объектам, возможно, является одним из проявлений такого отличия.

Экспериментальный факт равенства ускорений пробных тел в поле тяготения, получает в КМТ теоретическое обоснование. Его не требуется здесь отдельно постулировать. Такая кинематика выступает как следствие выявленных новых трансформационных свойств полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радченков О. Н. // Изв. вузов. Физика. - 2006. - №5 - С. 75-81.
2. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М.: ГИМФЛ, 1961. – С. 239.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1. – М.: Наука, 1976. – С. 51.
4. Радченков О. Н. // Изв. вузов. Физика. - 2008. - №12 – С. 46-51.
5. Караченцев И. Д. // УФН – 2001. – Т. 171. - С. 860-863.
6. Рябов В. А., Царев В. А., Цховребов А. М. // УФН – 2008. – Т. 178. - С. 1129-1164.

Two methods to derive the dynamical conservation laws in the compensatory gravitation model are presented. Based on these methods, local difference between inertial and gravitational properties of matter is detected in this model.

Keywords: *gauge formalism, dynamical conservation laws, dark matter.*